CHAP 03 Arithmétique - Divisibilité, division euclidienne

▸ Compétences

- Utiliser le vocabulaire de la divisibilité : diviseur, multiple, divisible
- Établir ou utiliser une relation de divisibilité à l'aide des propriétés
- Appliquer les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9, 10 et 11
- Effectuer et interpréter une division euclidienne (quotient, reste)
- Résoudre un problème de partage, de rangement ou de calendrier à l'aide d'une division euclidienne

▸ Fil rouge *coloration drone*

Une flotte de drones se gère avec des *entiers* : drones à ranger dans des baies de chargement, révisions à planifier tous les n vols, durées de mission à convertir en heures, minutes et secondes, numéros de série à contrôler…
Comment ranger 1 247 drones dans des baies de 18 places ? Comment savoir si un numéro de série est valide sans le tester sur la machine ? La **division euclidienne** et la **divisibilité** apportent les réponses.

I. Introduction

▸ Intro

L'**arithmétique** est une branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers et les propriétés des opérations sur ces nombres.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels (entiers positifs ou nul) et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (entiers positifs ou négatifs ou nul).
L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien entendu contenu dans $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

II. Opérations sur les entiers

II.1. Opérations classiques

▸ Définition 2.1

Il existe deux opérations dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$: l'addition ($+$) et la multiplication ($\times$).

▸ Propriétés 2.1

Pour l'addition :
L'**opposé** d'un nombre a est le nombre b tel que $a + b = 0$.

- Dans $\mathbb{N}$, seul 0 admet un opposé (lui-même).
- Dans $\mathbb{Z}$, chaque entier a un opposé : -2 est l'opposé de 2 ; $-(-5) = 5$ est l'opposé de -5.

Pour la multiplication :
L'**inverse** d'un nombre a est le nombre b tel que $a \times b = 1$.

- Dans $\mathbb{N}$, seul 1 admet un inverse (lui-même).
- Dans $\mathbb{Z}$, seuls 1 et -1 admettent un inverse.

II.2. La relation « divise »

▸ Définition 2.2

On dit que a est un **diviseur** de b ou que b est un **multiple** de a s'il existe un entier k tel que

$$b = k \times a.$$

On dit aussi que b est **divisible** par a.

Licence Ouverte Etalab 2.0

▸ **Exemple 2.1**

$91 = 7 \times 13$: donc 7 (ou 13) divise 91.

$-54 = 9 \times (-6) = (-27) \times 2$: donc 9, −6, −27 ou 2 sont des diviseurs de −54.

▸ **Python 2.1**

En ALGO python, on peut étudier une divisibilité en utilisant le *reste*, donné par % qui doit être nul :

```
🐍 Début de la console Python 🐍
>>> 91%13
0
>>> 7%3
1
🐍 Fin de la console Python 🐍
```

▸ **Remarques 2.1**

- Tout entier est divisible par 1 et par lui-même ; 1 est un diviseur de chaque entier.
- Tout entier n est un diviseur de 0 (car $0 \times n = 0$).
- Tout entier est multiple de lui-même.
- Tout entier est multiple de 1.

II.3. Propriétés

▸ **Propriétés 2.2**

Dans $\mathbb{Z}$:

- Si a divise b et b divise c alors : a divise c (transitivité).
- Si a divise b alors a divise bc, quel que soit l'entier c.
- Si c divise a et c divise b alors : c divise $a + b$ et c divise $a - b$.

Dans $\mathbb{N}^*$:

- Si a divise b alors : $a \leqslant b$.
- Si a divise b et b divise a alors : $a = b$.

▸ **Exemples 2.2**

- 7 divise 21 et 21 divise 105 donc 7 divise 105.
- 8 divise 40 donc 8 divise également 80, 120, etc...
- 6 divise 42 et 12 donc 6 divise $42 + 12 = 54$ et $42 - 12 = 30$.

Licence Ouverte Etalab 2.0

II.4. Critères de divisibilité

▸ Propriété 2.3

On a les résultats suivants :

Un entier naturel est divisible par :	Si :
2	son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3
4	la nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
5	son chiffre des unités est 0 ou 5
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9
10	son chiffre des unités est 0
11	la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11

▸ Exemples 2.3

Tester la divisibilité des nombres suivants à l'aide des critères du tableau :

— 2310 : divisible par 2, 3, 5, 10 et 11.

— 324 : divisible par 2, 3, 4 et 9.

▸ Python 2.2

En ALGO python, on peut « balayer » un ensemble pour tester des divisibilités :

```
🐍 Début de la console Python 🐍
>>> liste = [2, 3, 5, 10, 11]
>>> for div in liste :
...     if (2310 % div) == 0 :
...         print(f"{div} divise 2310",end=" // ")
...
2 divise 2310 // 3 divise 2310 // 5 divise 2310 // 10 divise 2310 // 11 divise 2310 //
🐍 Fin de la console Python 🐍
```

On peut également définir une ALGO `fonction booléenne` pour tester une divisibilité :

```
🐍 Début de la console Python 🐍
>>> def divise(n, d):
...     if n%d == 0 :
...         return True
...     else :
...         return False
...
>>> liste = [2, 3, 5]
>>> for div in liste :
...     print(f"{div} divise 2310 : {divise(2310,div)}",end=" // ")
...
2 divise 2310 : True // 3 divise 2310 : True // 5 divise 2310 : True //
🐍 Fin de la console Python 🐍
```

III. Division euclidienne

III.1. Exemples

▸ Exemple 3.1

Six personnes jouent avec un jeu de 32 cartes. L'une d'entre elle distribue les cartes de telle sorte que les 6 joueurs aient le même nombre de pièces. Est-il possible de répartir équitablement toutes les cartes ? Combien chaque joueur en aura-t-il ? Combien en restera-t-il ?

$6 \times 5 \leqslant 32 \leqslant 6 \times 6$ et $32 = 6 \times 5 + 2$: chaque joueur aura 5 cartes, et il en restera 2.

▸ Exemple 3.2

Dimitri a 172 billes. Il décide de les ranger dans des boîtes qui peuvent en contenir 12. Combien de boîtes va-t-il remplir complètement ? Combien mettra-t-il de billes dans la dernière boîte ?

$172 = 12 \times 14 + 4$ donc il y aura 14 boîtes complètes, et 4 billes dans la dernière.

▸ Exemple 3.3

Un confiseur vend des dragées par sachets de 50. Aujourd'hui, il a fabriqué 1 230 dragées. Combien de sachets pourra-t-il remplir ? Restera-t-il des dragées ? Si oui, combien ?

$1\,230 = 50 \times 24 + 30$ donc il y aura 24 sachets complets, et 30 dragées restantes.

III.2. Le principe

▸ Définition 3.1

a et b étant deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$, il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers relatifs tel que :

$$\begin{cases} a = b \times q + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}.$$

L'entier q est le quotient et l'entier r est le reste de cette division.

▸ Exemples 3.4

— Écrire l'égalité qui définit la division euclidienne de 99 par 5.

on a $99 = 5 \times 19 + 4$, donc $q = 19$ et $r = 4$ (avec $0 \leqslant 4 < 5$!).

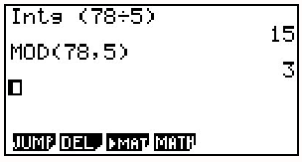
— On sait que $133 = 32 \times 4 + 5$. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

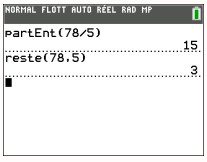
133 par 32 : on a $133 = 32 \times 4 + 5$ avec $0 \leqslant 5 < 32$, donc $q = 4$ et $r = 5$.

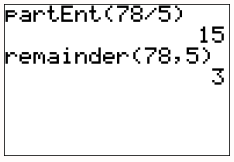
133 par 4 : $133 = 4 \times 32 + 5 = 4 \times 32 + 4 + 1 = 4 \times 33 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 4$, donc $q = 33$ et $r = 1$.

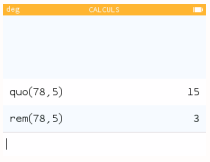
▸ Méthode calculatrice 3.1

La partie entière donne le quotient de la division euclidienne de a par b.
La fonction `MOD()`/`reste()`/`remainder()`/`rem()` donne le reste de la division euclidienne de a par b.









▸ Python 3.1

En ALGO python, on peut utiliser le *quotient entier* et le *reste* ou bien une ALGO `fonction` :

```
🐍 Début de la console Python 🐍
>>> a, b = 99, 5
>>> quotient, reste  = a//b, a%b
>>> print(f"{a}={b}*{quotient}+{reste}")
99=5*19+4
>>>
>>> def diveucl(a, b) :
...     return a//b, a%b
...
>>> diveucl(99,5)
(19, 4)
🐍 Fin de la console Python 🐍
```

III.3. Cas particuliers

▸ Propriétés 3.1

- *Nombres pairs – Nombres impairs* - le reste d'une division euclidienne par 2 est 0 ou 1 donc :
  - tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k nombre entier ;
  - tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec k nombre entier.
- b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.
- *Disjonction de cas* - Tout nombre s'écrit sous la forme (à partir d'une valeur de référence b) :
  (kb) ou $(kb + 1)$ ... ou $(kb + (b - 1))$.

Licence Ouverte Etalab 2.0