CHAP 03 Divisibilité - Exercices

Exercice 1 (★☆☆☆)

1. Écrire la division euclidienne de :
   a. 14 par 3 ;

   $14 = 3 \times 4 + 2$

   b. 145 par 12 ;

   $145 = 12 \times 12 + 1$

   c. 999 par 33 ;

   $999 = 33 \times 30 + 9$

   d. 6 974 par 412 ;

   $6\,974 = 412 \times 16 + 382$

   e. -17 par 4.

   $-17 = 4 \times (-5) + 3$

2. Une boîte contient 41 chocolats identiques à répartir entre 8 enfants. le plus âgé propose de répartir de façon égale entre les 7 autres enfants, lui prenant le reste.
   a. Quelle est la part de chacun ?

   $41 = 7 \times 5 + 6$

   b. En fait, la boîte contient 43 chocolats. L'enfant le plus âgé veut alors changer la règle. Pourquoi ?

   $43 = 7 \times 6 + 1$

3. En utilisant les critères de divisibilité :
   a. vérifier que 456 est divisible par 2 ; 3 et 4.

   pair & somme des chiffres & 56

   b. vérifier que 110 est divisible par 2 ; 5 ; 10 et 11.

   pair & finit par 0 & somme alternée

   c. déterminer la valeur de x pour que 12 3x5 (douze-mille-...) soit divisible par 9.

   somme des chiffres $\Leftrightarrow x = 7$

Exercice 2 (★★☆☆)

1. Comment s'écrivent les nombres impairs ? Les multiples de 5 ?

   $2k + 1$; $5k$

2. Quelles informations, en termes de division euclidienne, donne l'égalité $555 = 45 \times 12 + 15$?

   $555 = 45 \times 12 + 12 + 3 = 46 \times 12 + 3$ qui est la D.E. de 555 par 12

   $555 = 45 \times 12 + 15$ est la D.E. de 555 par 45

3. La différence de deux entiers a et b vaut 399. Lorsqu'on divise a par b, le quotient est 15 et le reste 21. Quels sont ces entiers ?

   $a - b = 399$ et $a = 15b + 21 \Leftrightarrow b = 27$ et $a = 426$

4. Soit n un entier.
   a. On pose $n = 2k$ (n est donc pair). Démontrer que $n(n+5)(n+7)$ est divisible par 2.
   b. On pose $n = 2k + 1$ (n est donc impair). Démontrer que $n(n+5)(n+7)$ est divisible par 2.
   c. Justifier que que $n(n+5)(n+7)$ est toujours divisible par 2.

   $n = 2k \Rightarrow n(n+5)(n+7) = 2 \times (k(2k+5)(2k+7))$

   $n = 2k + 1 \Rightarrow n(n+5)(n+7) = 2 \times ((2k+1)(k+3)(2k+8))$

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 3 (★☆☆☆)

1. Donner un entier entre 1 et 12 qui divise 48 mais qui ne divise pas 12.
2. Peut-on trouver un diviseur de 120 qui ne divise pas 480 ? Pourquoi ?
3. Combien y a-t-il de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 ?
4. Déterminer le chiffre x pour que le nombre 5 3x2 (cinq-mille-trois-cent-…-deux) soit divisible par 9.
5. Déterminer le chiffre y pour que 5 3y4 (cinq-mille-trois-cent-…-quatre) soit divisible par 3 et par 4.
6. En décomposant 1575 sous la forme 1 500 + 75, montrer que 25 divise 1 575.

Exercice 4 (★☆☆☆)

1. Donner l'ensemble des multiples de zéro.
2. Donner l'ensemble des multiples de 1.
3. Donner l'ensemble des diviseurs de zéro.
4. Donner l'ensemble des diviseurs de 1.
5. On note n un entier positif.
   a. Déterminer les deux entiers qui suivent n.
   b. Démontrer que la somme de trois nombres consécutifs est toujours un multiple de 3.
6. Comment s'écrivent : les multiples de 7 ? Les nombres pairs ? Les nombres impairs ?

Exercice 5 (★☆☆☆)

1. Écrire la division euclidienne de 118 par 23, puis de 427 par 13.
2. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 99 par 5, de 1 076 par 10, de 111 par 37, de 14 523 par 23.
3. Le quotient d'un entier a par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? Quelles sont les valeurs possibles de a ?
4. Le quotient d'un entier b par 13 est 5. Quels sont les restes possibles ? Quelles sont les valeurs possibles de b ?

Exercice 6 (★☆☆☆)

1. Un général d'armée veut faire défiler ses 2 537 soldats en rang par 15. Combien de rangées complètes peut-il faire et combien de soldats resteront isolés ?
2. 1 235 personnes doivent être emmenées dans des bus de 45 places. Combien faudra-t-il de bus et combien de personnes seront dans le bus non rempli ?
3. Le 1er janvier 2016 était un vendredi. Quel jour serons-nous le 1er janvier des 5 années suivantes ?
4. On cherche un nombre multiple de 9 dont le quotient de la division par 21 est 33. Quelles sont les possibilités ?
5. Quels sont les entiers positifs dont le quotient de la division par 7 est égal au double du reste ?
6. On remplit un tableau de 19 colonnes numérotées de 0 à 18 et 200 lignes numérotées de 0 à 199 avec les nombres entiers de 0 à 3 799, en se déplaçant de la gauche vers la droite et du haut vers le bas. Par exemple, la première ligne contiendra {0 ; 1 ; 2 ; ⋯ ; 18} et la deuxième {19 ; 20 ; 21 ; ⋯ ; 37}. Donner le numéro de la colonne et celui de la ligne à l'intersection desquelles sont inscrits les nombres 1 789 ? 1 995 ? 2 026 ?
7. À partir de l'égalité 842 270 = 3 251 × 259 + 261, donner le reste de la division euclidienne de 842 270 par 3 251 et de 842 270 par 259.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 7 ··· FIL ROUGE *DRONE* ··· (★☆☆☆)

1. Une entreprise de livraison possède 1 247 drones, rangés dans des baies de chargement de 18 emplacements. Combien de baies sont complètement remplies ? Combien de drones se trouvent dans la dernière baie ?
2. Un drone doit subir une révision tous les 45 vols (la première au 45e vol). Il a effectué 1 380 vols depuis sa mise en service.
   a. Combien de révisions a-t-il déjà subies ?
   b. À quel numéro de vol aura lieu sa prochaine révision ?
3. Une mission de cartographie a duré 12 500 secondes. À l'aide de divisions euclidiennes (par 3 600 puis par 60), exprimer cette durée en heures, minutes et secondes.
4. Le numéro de série d'un drone s'écrit 47x21, où x est un chiffre. Il est valide s'il est divisible par 9. Déterminer le chiffre x.
5. Un lot de 48 batteries et un lot de 126 batteries sont livrés. Chaque lot peut être rangé en paquets de 6 batteries, sans reste. Sans effectuer de division, justifier qu'il en est de même pour l'ensemble des 174 batteries.

Exercice 8 ··· UN PEU D'*INFORMATIQUE* ··· (★★☆☆)

Pour retrouver rapidement des fiches clients, un programme utilise une **table de hachage** de 13 cases, numérotées de 0 à 12. La fiche d'identifiant n est rangée dans la case r, où r est le reste de la division euclidienne de n par 13.

1. Dans quelle case sont rangées les fiches d'identifiants 1 250 ; 2 026 et 99 999 ?
2. a. Justifier que les fiches d'identifiants 2 026 et 2 546 sont rangées dans la même case (on parle de *collision*).
   b. Plus généralement, justifier que deux identifiants dont la différence est un multiple de 13 sont toujours rangés dans la même case.
3. Quels sont les identifiants compris entre 1 000 et 1 100 rangés dans la case 0 ?
4. En python, écrire une fonction `case(n)` qui renvoie le numéro de case de la fiche d'identifiant `n`, puis un programme qui permet de vérifier la réponse à la question 3.

Licence Ouverte Etalab 2.0