# TP 01 Logique – L'énigme des enfers

## ▸ Cadre

Dans la mythologie grecque, l'accès aux Enfers est gardé par Cerbère, un terrible chien à trois têtes. Celui-ci se trouve devant trois couloirs qui, soit permettent de rejoindre le monde des vivants, soit conduisent directement aux Enfers.

Lorsque Cerbère accueille un nouvel arrivant, il est contraint de lui dire la vérité. Par la suite, il peut mentir ou dire la vérité à sa guise, mais il respecte toujours les règles qu'il s'est fixées lors de l'accueil.

Après avoir bu la coupe de ciguë, Socrate se retrouve face à Cerbère. Celui-ci, honoré de rencontrer le grand philosophe, veut lui offrir une chance d'éviter la damnation éternelle. Il lui dit alors :



> « Je vais t'indiquer un des couloirs qui mène au monde des vivants mais, pour mettre à l'épreuve ta grande sagesse, chacune de mes têtes énoncera une indication logique, et ces indications seront soit toutes vraies, soit toutes fausses. Tu en déduiras le couloir que tu devras suivre. »

## ▸ Manipulation

On note $I_1$, $I_2$ et $I_3$ les *propositions* associées aux indications de la première, de la deuxième et de la troisième tête de Cerbère.

1. Expliquer pourquoi l'énoncé de Cerbère peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(I_1 \wedge I_2 \wedge I_3) \vee (\neg I_1 \wedge \neg I_2 \wedge \neg I_3).$$

Cerbère énonce alors les trois indications logiques :

— la première tête dit : « *Le premier couloir ainsi que le troisième mènent au monde des vivants* » ;

— la deuxième tête dit : « *Si le deuxième couloir mène au monde des vivants, alors le troisième n'y mène pas* » ;

— la troisième tête conclut par : « *Le premier couloir mène au monde des vivants par contre le deuxième n'y mène pas* ».

On note $C_1$, $C_2$, $C_3$ les *variables propositionnelles* correspondant au fait que le premier, le deuxième et le troisième couloir mènent au monde des vivants.

2. a. Expliquer pourquoi on a $I_1 \Leftrightarrow (C_1 \wedge C_3)$.
   b. Exprimer de même $I_2$ et $I_3$ sous la forme de *formules du calcul* des propositions dépendant de $C_1$, $C_2$ et $C_3$.
3. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les *tables de vérité*), déterminer le couloir que Socrate doit suivre pour rejoindre le monde des vivants.
4. En admettant que Cerbère ait menti en donnant les trois indications, Socrate pouvait-il suivre d'autres couloirs ? Si oui, le ou lesquels ?

## ▸ Humour



Licence Ouverte Etalab 2.0

# TP 01 Logique – L'énigme des enfers (Correction)

## Correction

1. Cerbère dit que les trois indications sont *soit* **toutes vraies**, *soit* **toutes fausses**. Son énoncé s'écrit donc :

$$(I_1 \wedge I_2 \wedge I_3) \vee (\neg I_1 \wedge \neg I_2 \wedge \neg I_3)$$

2. **a.** L'indication numéro 1 est une conjonction (« … ainsi que … ») : $I_1 \Leftrightarrow (C_1 \wedge C_3)$.

   **b.** L'indication numéro 2 est une implication : $I_2 \Leftrightarrow (C_2 \Rightarrow \neg C_3)$.

   L'indication numéro 3 est une conjonction (« … par contre … ») : $I_3 \Leftrightarrow (C_1 \wedge \neg C_2)$.

3. On établit la table de vérité des trois indications, et on cherche les lignes où elles sont toutes les trois vraies ou toutes les trois fausses.

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_1 \wedge C_3$ | $\neg C_3$ | $C_2 \Rightarrow \neg C_3$ | $\neg C_2$ | $C_1 \wedge \neg C_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F | F | F |
| V | V | F | F | V | V | F | F |
| V | F | V | V | F | V | V | V |
| V | F | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | F | F | F | F | F |
| F | V | F | F | V | V | F | F |
| F | F | V | F | F | V | V | F |
| F | F | F | F | V | V | V | F |

   Les colonnes en bleu correspondent à $I_1$, $I_2$ et $I_3$. Seules deux lignes (en jaune) valident l'énoncé de Cerbère :

   – la **ligne 3** (avec $I_1$, $I_2$, $I_3$ **vraies**) : $C_1 = V$, $C_2 = F$, $C_3 = V$, donc les couloirs 1 et 3 mènent au monde des vivants ;

   – la **ligne 5** (avec $I_1$, $I_2$, $I_3$ **fausses**) : $C_1 = F$, $C_2 = V$, $C_3 = V$, donc les couloirs 2 et 3 mènent au monde des vivants.

   Socrate ne sait pas dans quel cas il se trouve, mais dans les deux cas le couloir 3 mène au monde des vivants (alors que le couloir 1 ne convient que pour la ligne 3, et le couloir 2 que pour la ligne 5). Pour être sûr de rejoindre le monde des vivants :

   Socrate doit emprunter le couloir numéro 3.

4. Si Cerbère a menti en donnant les trois indications, on est dans la **ligne 5** ($I_1$, $I_2$, $I_3$ fausses) : les couloirs 2 et 3 mènent au monde des vivants.

   Dans ce cas, Socrate aurait aussi pu emprunter le couloir numéro 2 pour rejoindre le monde des vivants.