CHAP 02 Stats à deux variables - Exercices

Exercice 1

À partir des données suivantes, déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés (a et b seront arrondis au millième).

x_i	10	45	30	60	40
y_i	40	75	56	90	64

Représenter, sur un graphique, le nuage de points et la droite trouvée.

Exercice 2

Une entreprise a relevé sur les cinq dernières années son budget annuel en publicité (en centaine d'euros) et le volume annuel de ventes (en millier d'unités).
Ce relevé est donné dans le tableau suivant :

Budget publicitaire	32	33	35	36	37	38
Ventes	50	51	54	54,9	56	58,1

1. Placer sur un graphique les points correspondants au volume de ventes en fonction du budget publicitaire.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression sous la forme $y = ax + b$.
3. Estimer le volume des ventes pour un budget publicitaire de 3 400 euros.
4. Même question pour des budgets publicitaires de 3 000 euros puis de 5 000 euros.

Exercice 3 ··· UN PEU D'INFORMATIQUE ···

Le temps de chargement d'une page sur internet dépend de nombreux paramètres, entre autre le nombre d'utilisateurs qui y sont connectés simultanément.
Par ailleurs, le temps de chargement influe en retour sur le nombre de visiteurs : plus le temps de chargement est long, plus les utilisateurs sont susceptibles de se diriger vers d'autres ressources.

Le responsable d'un site a relevé le nombre d'internautes sur son site en fonction de sa durée de chargement :

Nombre d'internautes connectés (en milliers), x_i	0,5	1	2,5	3	4	5	6
Durée de chargement (en secondes), y_i	0,3	0,4	0,6	0,9	1,3	2	2,8

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ associés à cette série statistique.
   (Axes orthogonaux ; unités : 2 cm pour 1 000 internautes et 1 cm pour 0,2 seconde).
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement $\mathcal{D}$ obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).
3. Pour la suite, on prendra $y = 0{,}44x - 0{,}19$ pour équation de la droite $\mathcal{D}$.
   a. Tracer la droite $\mathcal{D}$.
   b. Avec ce modèle, estimer la durée de chargement pour 8 000 personnes connectées.
4. Une étude indépendante a montré que 60% des internautes cesse de charger une page pour se diriger vers un autre site dès que le temps de chargement dépasse 3,5 secondes.
   a. Avec le modèle précédent, estimer le nombre de visiteurs sur ce site lorsque la durée de chargement est de 3,5 secondes.
   b. Combien de visiteurs perdrait-il alors ?

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 4

Lors d'une enquête réalisée auprès de 500 personnes, on a estimé le nombre de personnes prêtes à acheter un nouveau produit en fonction du prix de ce produit :

Prix proposé en euros (x_i)	52	47	44	38,5	35,5	32	31	28
Nombre d'acheteurs potentiels (y_i)	80	125	145	200	225	250	265	280

1. Représenter le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ en prenant 1 cm pour 5 euros en abscisse (de 15 à 60) et 1 cm pour 50 personnes en ordonnée (de 0 à 400).
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à l'entier, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 4 décimales.

   Cet ajustement linéaire vous parait-il raisonnable ?
3. Tracer cette droite sur le graphique et placer le point moyen de ce nuage.
4. En utilisant cet ajustement :
   - Quel prix maximal doit-on proposer pour que plus de 60 % des personnes interrogées soit prêtes à l'acheter ?
   - Au-delà de quel prix le taux d'acheteurs potentiels tombe-t-il sous les 10 % ?

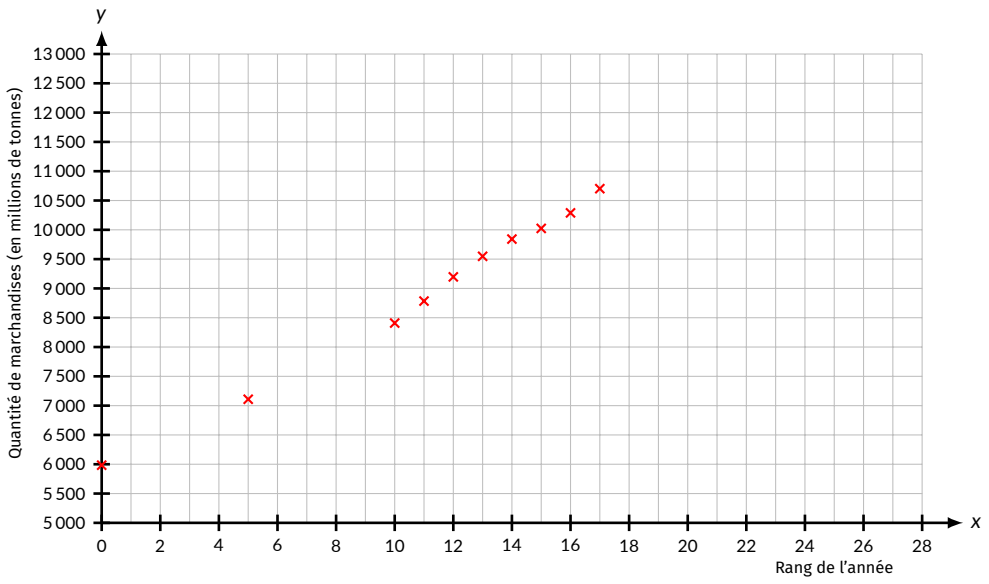
Exercice 5

Le tableau ci-dessous donne les quantités de marchandises transportées dans le monde par voie maritime entre 2000 et 2017, exprimées en millions de tonnes.

Année	2000	2005	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année : x_i	0	5	10	11	12	13	14	15	16	17
Quantité de marchandises en millions de tonnes y_i	5 984	7 109	8 409	8 784	9 197	9 548	9 842	10 024	10 289	10 702

Source : Nations Unies, (UNCTAD)

Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est donné ci-dessous :



1. Expliquer pourquoi ce nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.
3. On décide de modéliser la quantité de marchandises y en fonction du rang de l'année x par l'expression $y = 280x + 5\,800$.

   Tracer la droite D d'équation $y = 280x + 5\,800$ dans le repère donné précédemment.
4. Estimer, selon le modèle de la question **3.**, la quantité de marchandises transportées par voie maritime en 2025, en expliquant la démarche suivie.

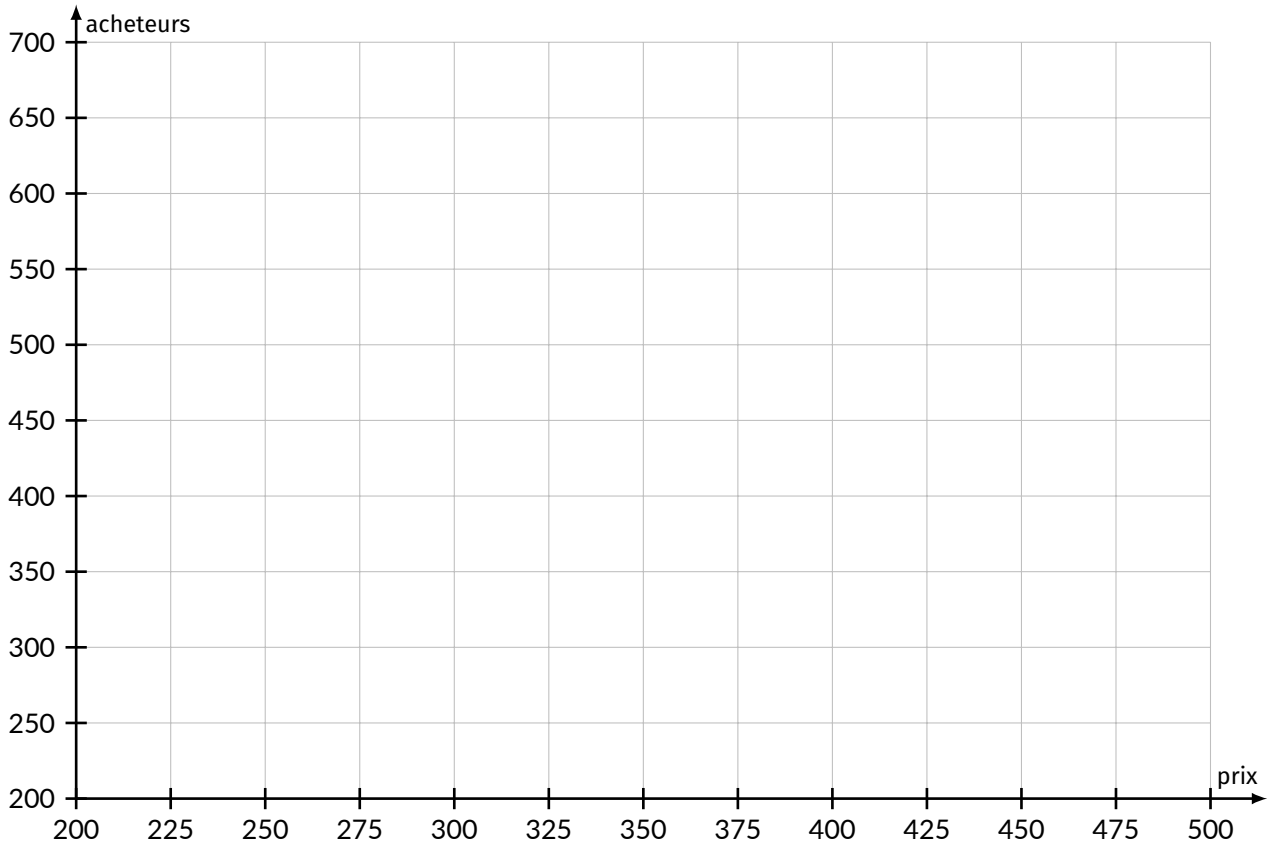
Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 6

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une enquête réalisée par une entreprise pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente :

Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	632	475	305	275	266	234

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage et on effectue le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$.



1. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs demandées seront arrondies au millième) :

Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
$z_i = \ln(y_i)$	6,449	6,163				

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$. Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine ?
3. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$ (a sera donné à 10^{-4} près par excès et b à 10^{-2} près par excès).
4. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y_i en fonction de x_i sous la forme $y = k\,e^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier le plus proche).
5. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels si le prix de vente est fixé à 400 €.

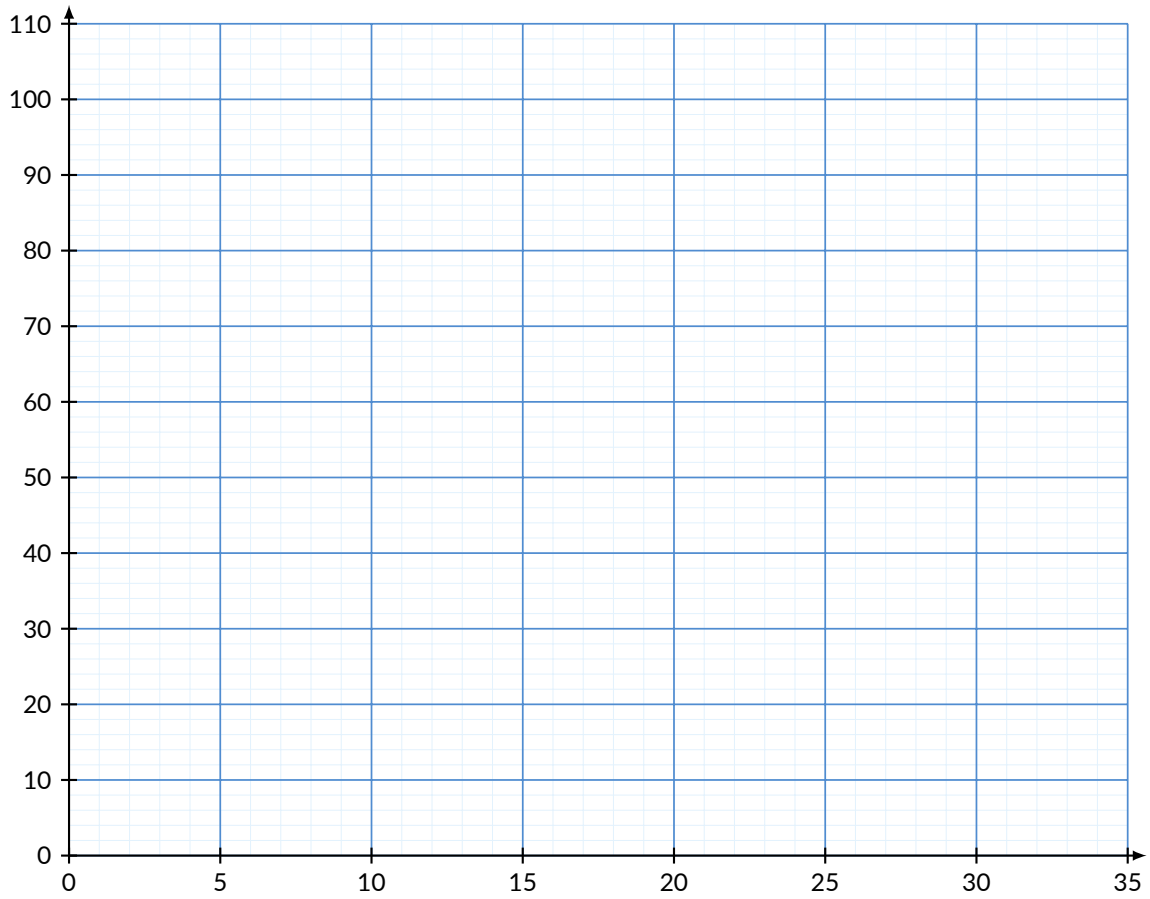
Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 7 ••• FIL ROUGE *DRONE* •••

Pendant un vol d'essai, le pilote relève à intervalles réguliers la durée de vol écoulée (en minutes) et le niveau de batterie restant du drone (en %) :

Durée de vol t_i (min)	0	5	10	15	20	25	30
Batterie restante b_i (%)	100	91	81	69	58	47	35

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ;\ b_i)$.



2. Calculer, arrondi au millième, le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique. Un ajustement affine vous semble-t-il pertinent ?

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de b en t sous la forme $b = at + c$ (a arrondi au centième, c arrondi au dixième).

4. Pour la suite, on prendra $b = -2{,}19\,t + 101{,}5$.

a. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

b. Estimer, à l'aide de ce modèle, le niveau de batterie restant après 22 minutes de vol.

5. Par sécurité, le pilote doit faire atterrir le drone dès que le niveau de batterie atteint 20 %.
À l'aide du modèle précédent, déterminer au bout de combien de minutes de vol ce seuil sera atteint.

Licence Ouverte Etalab 2.0