CHAP 03 Généralités sur les fonctions

Compétences

- Utiliser le vocabulaire des fonctions : image, antécédent, courbe, etc
- Déterminer une image ou des antécédents
- Lire et construire un tableau de signes et un tableau de variations
- Exploiter un tableau de variations (extrema, signe, etc)

Fil rouge *coloration drone*

Pendant une mission, le contrôleur de vol enregistre l'altitude du drone (en mètres) en fonction du temps écoulé depuis le décollage (en secondes) : montée, phase de croisière, puis descente.
À quel instant le drone dépasse-t-il l'altitude réglementaire de 50 m ? Quelle est son altitude maximale ? Comment répondre à ces questions à partir d'une formule, d'une courbe ou d'un tableau ?

I. Définitions

I.1. Courbe, tableau de valeurs

Méthode 1.1

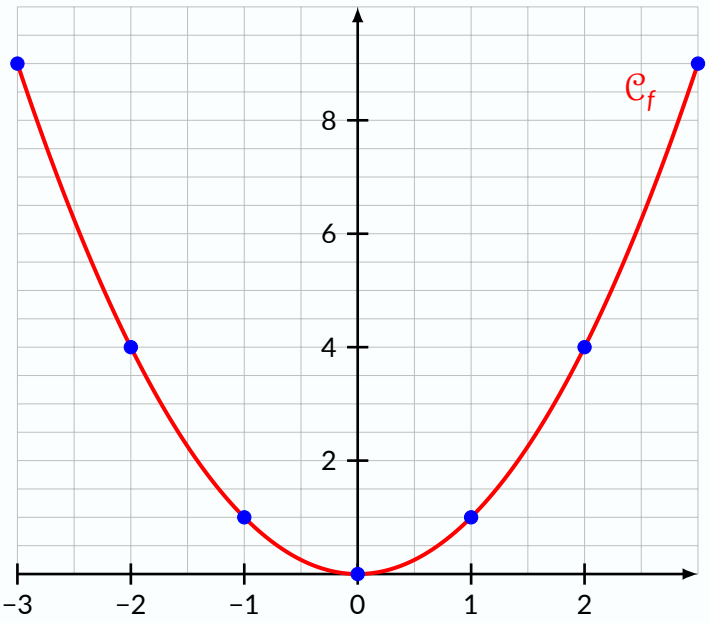
Une fonction peut se donner :

- par sa formule ($f(x) = \ldots$) ;
- par sa courbe dans un repère ;
- par un tableau de valeurs.

Exemple 1.1

Soit $f(x) = x^2$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



I.2. Image, antécédent, équation

▸ **Méthodes 1.2**

Déterminer l'**image** d'un réel x par f revient à déterminer la valeur de $f(x)$:

- soit par **calculs** : on remplace x ;
- soit dans le tableau de valeurs : on cherche x dans la première ligne ;
- soit on utilise la courbe : on part des abscisses et on lit l'ordonnée du point de la courbe.

Déterminer les (éventuels) antécédents de y par f revient à chercher **tous** les x tels que que $y = f(x)$:

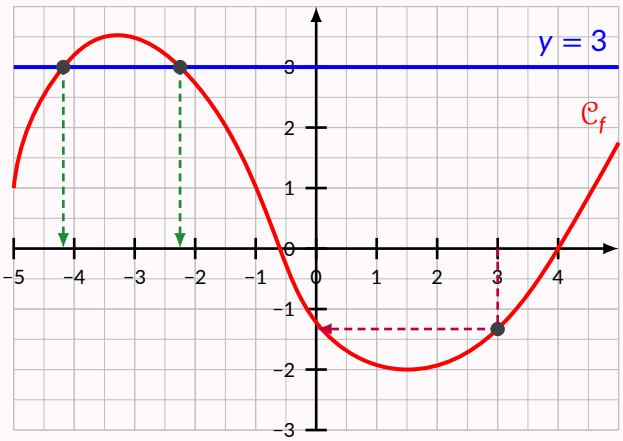
- par **calculs** ; en résolvant l'équation $f(x) = y$;
- via le tableau de valeurs : on cherche y dans la deuxième ligne ;
- avec la courbe : on regarde les points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale de hauteur y.

▸ **Remarques 1.1**

Les calculs **algébriques** donnent toujours les valeurs exactes, mais la résolution d'**équations** (pour les antécédents) n'est pas toujours simple !

Le travail sur la courbe est le plus simple, il s'agit de **lectures graphiques**, et il faut (autant que faire se peut) travailler avec la courbe pour vérifier ses résultats !

▸ **Illustration 1.1**



On peut donc « lire » l'image de 3 par f : $f(3) \approx -1{,}35$.
On peut donc « lire » les antécédents de 3 par f : environ $-2{,}25$ et $-4{,}2$.

II. Tableau de signes, tableau de variations

II.1. Définitions

▸ **Méthodes 2.1**

Le **tableau de signes** (tds) d'une fonction permet de consigner, dans un tableau (sic), les intervalles (endroits) sur lesquels la fonction est positive (+) ou négative (−).
Graphiquement, une fonction est positive si sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, négative sinon.

Le **tableau de(s) variations** (tdv) d'une fonction permet de consigner, dans un tableau (sic), les intervalles (endroits) sur lesquels la fonction est croissante (↗) ou décroissante (↘).
Graphiquement, une fonction est croissante si sa courbe « monte », décroissante sinon.

Licence Ouverte Etalab 2.0

▸ Illustration/Remarque 2.1

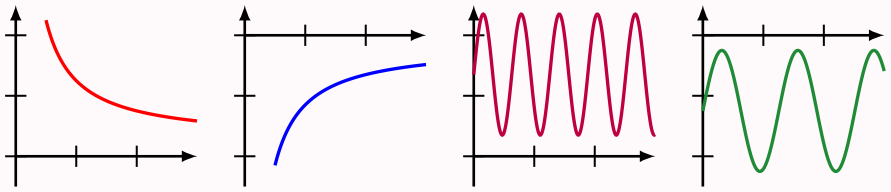
En travaillant sur la courbe donnée précédemment :

x	-5		$-0{,}6$		4		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-5		$-3{,}25$		$1{,}5$		5
f	1	↗	$3{,}5$	↘	-2	↗	$1{,}75$

Il ne faut pas « mélanger » le signe et les variations d'une fonction !

- ▷ une fonction peut être décroissante et positive ;
- ▷ une fonction peut être croissante et négative ;
- ▷ une fonction peut être positive et changer « très souvent de variations » ;
- ▷ toutes les combinaisons sont possibles !



II.2. Utilisations

▸ Méthodes 2.2

Un tableau de variations (ou une courbe) permet de :

- déterminer un maximum, un minimum : valeurs Max et min de la L2 du tdv ;
- déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$: on « place » k sur les flèches ;
- déterminer le tds (sans passer par la courbe) : on place les « 0 » et on « suit les flèches ».

▸ Illustration 2.2

On donne le tdv d'une fonction f :

x	-5		a		-2		b		3		c		5		10
f	2	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	4	↘	0	↘	-3	↗	-1

(1,75 sur chaque flèche)

- ▷ le maximum de f est 4, atteint en $x = 3$;
- ▷ le minimum de f est -5, atteint en $x = -2$;
- ▷ l'équation $f(x) = 1{,}75$ admet 3 solutions ;
- ▷ l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions (notées a, b et c).

On peut donc en déduire le tds de $f(x)$:

x	-5		a		b		c		10
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	