# CHAP 02 Variables aléatoires continues - Exercices

## Exercice 1 (☆☆☆)

1. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [0 ; 10].
   Calculer la probabilité des événements suivants : $(X < 3)$, $(X \geqslant 6)$, $(3 < X \leqslant 8)$.
2. Alice et Brigitte se donnent rendez-vous à la bibliothèque entre 15h et 16h. Alice arrive à 15h20. Le délai d'arrivée de Brigitte à partir de 15h est une variable aléatoire qui suit $\mathcal{U}_{[0;60]}$ (en minutes).
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a. Brigitte arrive avant Alice ;
   b. Alice attend Brigitte plus de 20 min ;
   c. Alice attend Brigitte moins de 5 min.

## Exercice 2 (☆☆☆)

Le standard téléphonique d'un grand magasin limite la durée d'attente en transférant le plus vite possible les appels vers d'autres postes.
On s'intéresse aux appels dont la durée d'attente est comprise entre 10 s et 1 minute.
On note T la variable aléatoire qui, à un appel pris au hasard, associe la durée de l'attente. On admet que T suit la loi uniforme sur [10 ; 60].

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a. A : « la durée de l'attente est inférieure à 20 s »,
   b. B : « la durée de l'attente est supérieure à 40 s »,
   c. C : « la durée de l'attente est comprise entre 20 s et 40 s ».
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$ et en donner une interprétation.

## Exercice 3 (☆☆☆)

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 5)$.
   a. Retrouver avec la calculatrices les valeurs approchées arrondies à $10^{-3}$ :
   $$P(X \leqslant 28) \approx 0{,}945 \qquad P(X \leqslant 12) \approx 0{,}055$$
   b. Donner une valeur approchée de $P(12 \leqslant X \leqslant 28)$.
2. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10 ; 2)$.
   Calculer les probabilités suivantes (arrondir à $10^{-3}$) :
   a. $P(X \leqslant 8)$ et $P(X > 8)$ ;
   b. $P(9 \leqslant X \leqslant 12)$ et $P(7 \leqslant X \leqslant 14)$.

## Exercice 4 (☆☆☆)

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 5)$.
   a. Calculer, au millième, les probabilités $P(X \leqslant 28)$ et $P(X > 28)$.
   b. Calculer, au millième, les probabilités $P(X \leqslant 12)$ et $P(X > 12)$.
   c. Calculer, au millième, les probabilités $P(18 \leqslant X \leqslant 22)$ et $P(19 \leqslant X \leqslant 21)$.
2. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(24 ; 6)$.
   a. Calculer, au centième, les probabilités $P(X \leqslant 30)$, $P(X > 30)$ et $P(X \leqslant 21)$.
   b. Calculer, au centième, la probabilité $P(18 \leqslant X \leqslant 30)$.
   c. Calculer, au centième, la probabilité $P(16{,}5 \leqslant X \leqslant 31{,}5)$.
3. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(15 ; 3)$.
   a. Calculer, au centième, les probabilités $P(X \leqslant 16)$, $P(X > 20)$, $P(X \leqslant 15)$.
   b. Calculer, au centième, les probabilités $P(9 \leqslant X \leqslant 21)$ et $P(6 \leqslant X \leqslant 24)$.

Licence Ouverte Etalab 2.0

## Exercice 5 (★☆☆)

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus pendant une année. On considère que la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros. On suppose que $C \sim \mathcal{N}(1200\,;\,200)$.
Calculer la proba qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 et 1 500 euros.

## Exercice 6 (★☆☆)

On note X la variable aléatoire qui, à chaque client d'un détaillant de matériel informatique tiré au hasard parmi les clients d'un mois donné, associe le montant total de ses achats en euros.
On suppose que $X \sim \mathcal{N}(550\,;\,195)$. On choisit au hasard un client.
Calculer, arrondies au centième, les probabilités de chacun des événements suivants :

1. le montant de ses achats est inférieur ou égal à 600 euros ;
2. le montant de se achats est d'au moins 400 euros ;
3. le montant de ses achats est compris entre 400 et 800 euros.

## Exercice 7 (★☆☆)

Chaque probabilité sera arrondie à $10^{-2}$.

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}7)$.
   a. Calculer $P(X \leqslant 40)$ et $P(X \leqslant 29)$.
   b. En déduire $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$.
2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale.
   a. Déterminer les paramètres $\mu$ et $\sigma$ de cette loi normale. Arrondir $\sigma$ au centième.
   b. Soit une variable aléatoire Y qui suit une telle loi normale. Calculer $P(30 \leqslant Y \leqslant 40)$.
   c. Comparer les résultats obtenus aux questions **1.b.** et **2.b.**.
   d. En utilisant le principe de correction de continuité, retrouver le résultat de la question **1.b.** à l'aide de Y.

## Exercice 8 ··· FIL ROUGE *DRONE* ··· (★☆☆)

Le capteur GPS d'un drone mesure sa position avec une erreur, par rapport à sa position réelle, modélisée par une variable aléatoire X (en mètres) suivant la loi normale centrée $\mathcal{N}(0\,;\,2{,}5)$.

1. Calculer, à la calculatrice (arrondies au millième), les probabilités suivantes :
   a. $P(-2{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$ ;
   b. $P(-5 \leqslant X \leqslant 5)$ ;
   c. $P(-7{,}5 \leqslant X \leqslant 7{,}5)$.

   **NB :** On retrouve, pour chacune des trois questions précédentes, le résultat obtenu à l'aide de la propriété du cours sur les intervalles 1-2-3-$\sigma$.
2. En déduire la probabilité que l'erreur de positionnement dépasse 5 m en valeur absolue, c'est-à-dire $P(|X| > 5)$.
3. Le constructeur du drone garantit un positionnement à moins de 5 m de la position réelle, avec une probabilité d'au moins 95 %. Cette garantie est-elle vérifiée ?

Licence Ouverte Etalab 2.0

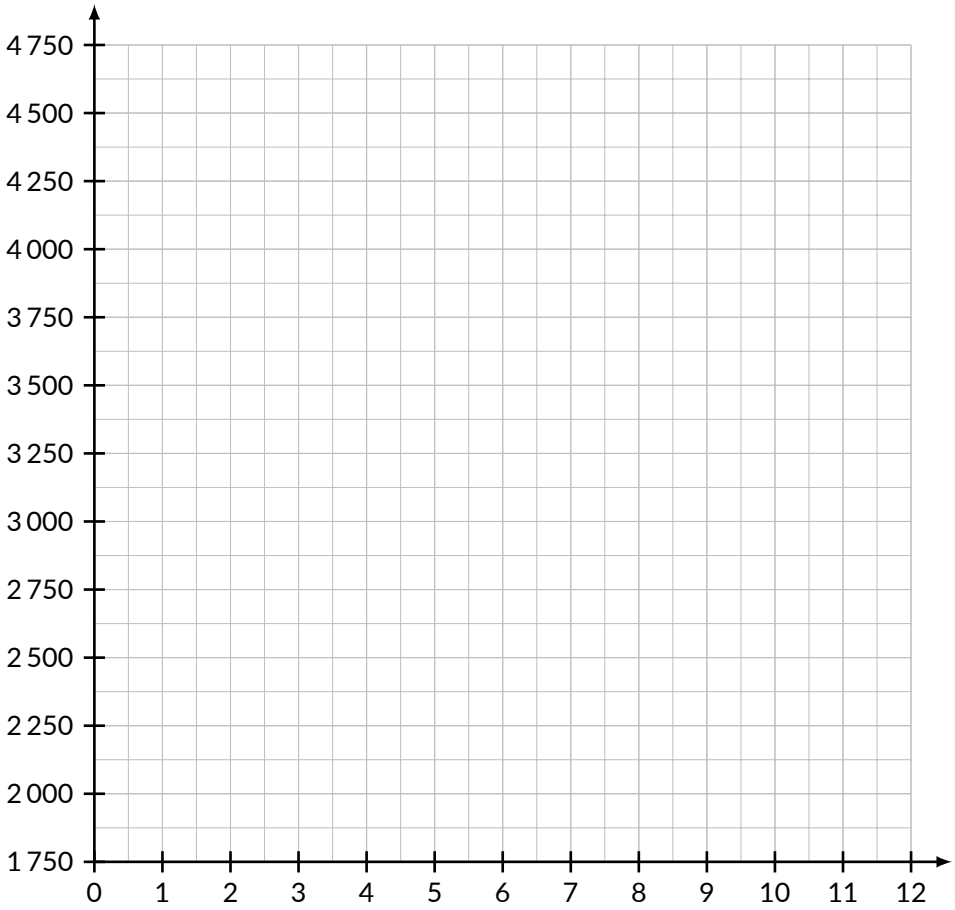
## Exercice 9 (☆☆☆)

### Partie A

Un grand fabricant d'ordinateurs portables analyse le nombre de commandes mensuelles d'un de ses modèles au cours de certains mois, en 2017. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

| Mois (en 2017) | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Août |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ : rang du mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_i$ : nb de commandes | 4 650 | 4 400 | 4 150 | 3 850 | 3 450 | 3 200 | 2 950 | 2 600 |

**1.** Représenter le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique précédente.




Le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ ayant un aspect rectiligne, on décide de procéder à un ajustement affine de ce nuage.

**2.** **a.** Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer sur le graphique.

**b.** Déterminer une équation de la droite de régression de $y$ en $x$, sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients $a$ et $b$ seront arrondis au dixième. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

**3.** **a.** Déterminer, à l'aide de l'équation de la droite de régression, une estimation du nombre de commandes de ce modèle d'ordinateur pour le mois de novembre 2017.

**b.** Expliquer pourquoi cette droite de régression ne peut servir de modèle que sur un intervalle de temps limité.

### Partie B

Le fabricant commercialise un autre modèle d'ordinateur portable, avec lequel certains appareils présentent parfois un défaut d'alimentation.
Les systèmes d'alimentation utilisés proviennent de deux fournisseurs différents, notés A et B ; 60 % d'entre eux proviennent du fournisseur A, les autres du fournisseur B.
Le fabricant constate que 2 % des systèmes d'alimentation provenant du fournisseur A et 3 % de ceux provenant du fournisseur B présentent un défaut.

On prélève au hasard un ordinateur portable dans le stock du fabricant. On considère les évènements suivants :

— A : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur A » ;

— B : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur B » ;

— D : « l'ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé, à l'aide des évènements A, B, D et $\overline{D}$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cap D$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Prouver que la probabilité que l'ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation vaut 0,024.
4. Un ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.

**Partie C**

*Dans cette partie, les probabilités, seront arrondies au millième, si besoin*

On admet désormais que la probabilité qu'un ordinateur portable prélevé au hasard dans le stock présente un défaut d'alimentation est égale à 0,024.

1. On prélève au hasard 20 ordinateurs portables dans le stock pour en vérifier le bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui, parmi les 20 ordinateurs prélevés, dénombre ceux qui présentent un défaut d'alimentation.
   a. Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur prélevé ne présente un défaut d'alimentation.
   c. En déduire la probabilité qu'au moins un ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation.
2. On tire cette fois-ci au hasard avec remise 1 000 ordinateurs portables dans le stock.
   La variable aléatoire qui. parmi les 1 000 ordinateurs tirés, dénombre ceux présentant un défaut d'alimentation, suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}024$.
   On admet que la loi de cette variable aléatoire peut être approchée par celle d'une variable Y, qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 24$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}84$.
   a. Justifier les paramètres de la variable aléatoire Y.
   b. Déterminer la probabilité que, parmi les 1 000 ordinateurs prélevés, il y ait au moins 15 ordinateurs présentant un défaut d'alimentation en calculant la probabilité $p(Y \geqslant 14{,}5)$.

## Exercice 10 ··· UN PEU D'INFORMATIQUE ··· (☆☆☆)

Un fournisseur de services cloud mesure le temps de réponse de son API, en millisecondes. On modélise ce temps de réponse par une variable aléatoire T suivant la loi normale $\mathcal{N}(80 ; 15)$.

1. Calculer, à la calculatrice (arrondies au millième), les probabilités $P(T \leqslant 120)$ et $P(T > 120)$.
2. On envoie 2 000 requêtes à l'API. On note X la variable aléatoire qui, parmi ces 2 000 requêtes, dénombre celles dont le temps de réponse dépasse 120 ms. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2\,000$ et $p = 0{,}004$ (valeur arrondie de la question précédente).
   a. Vérifier que les conditions usuelles d'approximation de X par une loi normale sont réunies.
   b. Donner les paramètres $\mu$ et $\sigma$ (arrondi au centième) de la loi normale Y approchant X.
3. En utilisant le principe de correction de continuité, calculer une valeur approchée de $P(X \geqslant 5)$ à l'aide de $P(Y \geqslant 4{,}5)$.
4. On admet que la valeur exacte, calculée directement avec la loi binomiale, est $P(X \geqslant 5) \approx 0{,}901$. Comparer cette valeur à celle obtenue à la question précédente, et commenter.

Licence Ouverte Etalab 2.0