CHAP 03 Fiabilité - Exercices

Exercice 1

Dans une production en grand nombre de piles électriques d'une certaine marque, une étude statistique a montré que la proportion de piles encore en état de fonctionnement au bout de 400 jours est de 60,65 %. On admet que la variable aléatoire T qui, à toute pile choisie au hasard dans ce lot, associe sa durée de vie t (en jours) suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer la valeur exacte de λ et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-5} près.
2. Déterminer la MTBF de T.
3. Calculer les probabilités $p(T > 1000)$ et $p(T \leqslant 500)$.

Exercice 2

La durée de vie (exprimée en heures) d'un agenda électronique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On note R la fonction de fiabilité.
   a. Donner l'écriture de $R(t)$ en fonction de t et de λ.
   b. Sachant que $R(1\,000) = 0{,}85$, déterminer λ à 10^{-6} près par excès.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,16$.
   a. Calculer le temps moyen de bon fonctionnement d'un agenda électronique.
   b. Calculer $p(T > 2\,000)$ à 10^{-3} près.
   c. Résoudre $p(T < t) = 0{,}5$. Arrondir à l'heure la plus proche.

Exercice 3

Les valeurs des probabilités seront arrondies au millième.

Dans une production de lampes pour vidéo-projecteurs, on admet que la variable aléatoire T qui, à toute lampe choisie au hasard dans la production, associe sa durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Le constructeur annonce que la durée de vie moyenne de ce type de lampes est de 2 000 heures. En déduire la valeur de λ.
2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une telle lampe soit supérieure à 4 000 heures ?
3. Déterminer le réel t tel que $p(T \leqslant t) = 0{,}7$.
4. Sachant qu'une lampe a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité pour qu'elle tombe en panne avant 4 000 heures ?

Exercice 4

Les valeurs des probabilités seront arrondies au millième.

On suppose que la durée de vie d'une diode, en heures, définit une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,08$.
   a. Quel est le temps moyen de bon fonctionnement de cette diode ?
   b. Quelle est la probabilité que la diode fonctionne encore au bout de 10 000 heures ?
   c. Quelle est la probabilité que la première panne intervienne entre la 10 000e et la 15 000e heure ?
2. Quel devrait être, arrondi à l'heure près, le temps moyen de bon fonctionnement de la diode pour qu'elle ait une chance sur deux de fonctionner encore au bout de 20 000 heures ?

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 5

Dans cet exercice, les résultats numériques seront fournis sous forme décimale arrondie au millième, sauf indication contraire.

Un technicien a été chargé d'étudier le fonctionnement d'un certain type A de pièces. Après une étude statistique, il est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type A, associe sa durée de vie (en jours) suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}007$.

1. Quelle est (à un jour près) le temps moyen de bon fonctionnement d'une pièce de type A ?
2. Calculer la probabilité pour qu'une pièce de type A :
   - soit en panne au bout de 200 jours.
   - soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours.
3. Déterminer (à un jour près) le temps de bon fonctionnement minimal d'une pièce de type A avec une fiabilité inférieure ou égale à 0,8.
4. On considère deux pièces de type A fonctionnant de façon indépendante.
   a. Déterminer la fonction de fiabilité R du système obtenu en montant les deux pièces en série.
   b. Calculer la probabilité que ce système fonctionne au moins 150 jours.

Exercice 6 ••• FIL ROUGE *DRONE* •••

Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au millième, sauf indication contraire.

Un drone de surveillance utilise un contrôleur de vol (composant de type A) et un module GPS (composant de type B). On note T_1 et T_2 les durées de vie, en heures, de ces deux composants :
T_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}0011$;
T_2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0{,}000\,8$.
On supposera que les pannes des différents composants sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'un contrôleur de vol soit encore en état de marche après 1 000 heures de fonctionnement ? Même question pour un module GPS.
2. Déterminer, à l'heure près, à partir de combien d'heures 70 % des contrôleurs de vol auront eu leur première défaillance.
3. Pour améliorer la fiabilité du drone, on installe deux contrôleurs de vol de type A en parallèle (le second prend le relais si le premier tombe en panne) : quelle est la probabilité que ce système de contrôle soit défaillant avant 1 000 heures de fonctionnement ?
4. Le drone ne peut voler que si son contrôleur de vol (un seul, de type A) et son module GPS fonctionnent. Quelle est la probabilité que cet ensemble, monté en série, fonctionne encore au-delà de 1 000 heures ?

Exercice 7

Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au centième.

La fonction de fiabilité d'un composant C est définie par $R(t) = e^{-0{,}0125t}$ où t est compté en jours. On note X la durée de vie aléatoire (en jours) du composant C.

1. Quel est le temps moyen de bon fonctionnement du composant C ?
2. Quelle est la probabilité que le composant C fonctionne encore au bout de 60 jours ?
3. Au bout de combien de jours la fiabilité deviendra-t-elle inférieure à 0,1 ?
4. Un dispositif utilise quatre composants C identiques, fonctionnant simultanément et de manière indépendante. Le dispositif est dit « opérationnel » si au moins trois de ces composants fonctionnent.
   a. Soit F la variable aléatoire égale au nombre de composants de ce dispositif qui fonctionneront encore dans 60 jours. Quelle est la loi de F ?
   b. Quelle est la probabilité que le dispositif soit opérationnel dans 60 jours ?

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 8

On désigne par T la variable aléatoire qui mesure, en heures, la durée de fonctionnement sans panne d'un appareil ménager. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, la probabilité pour que T soit supérieur à t est donnée par :

$$R(t) = e^{-0{,}000\,3t}.$$

1. Donner (arrondie à l'unité) la moyenne du temps de bon fonctionnement.
2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour que l'appareil ménager tombe en panne avant 200 heures d'utilisation.
3. Calculer l'instant t où la fiabilité est égale à 0,5 (on donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur arrondie à l'heure près). Faire une phrase en français pour interpréter ce résultat.

Exercice 9

Dans cet exercice, les résultats numériques seront fournis sous forme décimale arrondie au millième, sauf indication contraire.

On étudie la durée de vie d'un certain type de batterie pour automobiles. On admet que cette durée de vie (comptée en années) définit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Partie A

Une étude statistique a montré qu'environ 60 % des batteries de ce type fonctionnaient encore correctement deux ans après leur mise en service. En déduire la valeur de λ.

Partie B

Dans cette partie, on prend $\lambda = 0{,}25$.

1. Quelle est la moyenne du temps de bon fonctionnement (en années) d'une batterie de ce type ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a. A : « une batterie de ce type aura une défaillance avant trois années d'utilisation » ;
   b. B : « une batterie de ce type fonctionnera correctement pendant plus de six ans » ;
   c. C : « une batterie de ce type aura une défaillance entre quatre et sept années d'utilisation ».
3. Déterminer au bout de combien d'années (résultat arrondi à l'entier le plus proche) la probabilité de voir une batterie de ce type fonctionner encore correctement n'est plus que de 10 %.

Exercice 10 ··· UN PEU D'INFORMATIQUE ···

Dans cet exercice, les résultats numériques seront fournis sous forme décimale arrondie au millième, sauf indication contraire. On rappelle qu'une année compte 8 760 heures.

Une baie de stockage d'un serveur de fichiers utilise des disques durs identiques. La durée de vie T d'un disque (en heures) suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le constructeur annonce une MTBF de 500 000 heures. On supposera que les pannes des disques sont indépendantes.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Calculer la probabilité qu'un disque fonctionne encore au bout d'un an.
3. Calculer la probabilité qu'un disque tombe en panne avant la fin de la cinquième année (soit 43 800 heures).
4. Calculer $p(T \leqslant 500\,000)$. Un disque dont la MTBF est de 500 000 heures fonctionne-t-il « en général » pendant 500 000 heures ? Commenter.
5. Au bout de combien d'heures (arrondi à l'heure) 5 % des disques seront-ils tombés en panne ? Donner aussi ce résultat en années, arrondi au dixième.
6. La baie contient deux disques.
   a. En **RAID 0**, les données sont réparties sur les deux disques : la baie est inutilisable dès qu'un disque tombe en panne. Calculer la probabilité que la baie fonctionne encore après cinq ans.
   b. En **RAID 1** (miroir), les données sont copiées sur les deux disques : la baie fonctionne tant qu'au moins un disque fonctionne. Calculer la probabilité que la baie fonctionne encore après cinq ans.
   c. Comparer les deux montages.

Licence Ouverte Etalab 2.0