CHAP 03 Fiabilité, loi exponentielle

▸ Compétences

- Définir et interpréter la fonction de défaillance et de fiabilité d'un matériel
- Calculer des probabilités classiques et la MTBF
- Déterminer λ à partir d'une MTBF ou d'une probabilité
- Utiliser l'absence de mémoire de la loi exponentielle
- Étudier la fiabilité d'un système en série ou en parallèle

▸ Fil rouge *coloration drone*

Un drone de surveillance embarque de nombreux composants : contrôleur de vol, moteurs, module GPS, batterie… Pour chacun d'eux, le constructeur indique une **MTBF**. Comme une panne en vol peut entraîner la perte de l'appareil, il faut estimer la probabilité qu'un composant fonctionne encore après t heures de vol.
Comment modéliser la durée de vie d'un composant ? Que change la *redondance* (deux contrôleurs de vol au lieu d'un seul) sur la fiabilité du drone ?

I. Fonction de défaillance, fonction de fiabilité

I.1. Introduction

▸ Cadre

Lors de l'acquisition d'un appareil électronique ou électroménager par exemple, le choix est effectué selon certains critères dont l'un peut-être la ***fiabilité*** : un modèle est plus ***fiable*** qu'un autre signifie que, « *en général* », un appareil de ce modèle fonctionne correctement plus longtemps qu'un appareil de l'autre modèle. Il s'agit d'une *tendance*, non d'une *certitude*. Pour définir la fiabilité, on est amené à parler de *probabilité*.

▸ Vocabulaire

Pour l'**AFNOR** (Association Française pour la NORmalisation) : « La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une période donnée. »

afnor NORMALISATION

I.2. Vocabulaire

▸ Idée 1.1

La durée de vie d'un matériel donné sera modélisée par une variable aléatoire continue T prenant (théoriquement) ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Pour une valeur t dans $[0\,;+\infty[$, on utilise les notations suivantes :

- $\mathrm{F}(t) = p(\mathrm{T} \leqslant t)$;
- $\mathrm{R}(t) = 1 - \mathrm{F}(t) = p(\mathrm{T} > t)$.

La probabilité $\mathrm{F}(t) = p(\mathrm{T} \leqslant t)$ s'interprète comme la probabilité que le matériel connaisse une défaillance avant l'instant t : pour cette raison F est appelée la **fonction de défaillance** du matériel (en anglais, défaillance se dit *failure*, d'où la lettre F).

Inversement, la probabilité $\mathrm{R}(t) = 1 - \mathrm{F}(t) = p(\mathrm{T} > t)$ s'interprète comme la probabilité que le matériel ait fonctionné correctement jusqu'à l'instant t : R est donc appelée **fonction de fiabilité** du matériel (en anglais, fiabilité se dit *reliability*, d'où la lettre R).

▸ Remarque 1.1

Pour pouvoir calculer les valeurs de la fonction R de fiabilité d'un matériel donné, il faut connaître la *loi* de T. Conformément au programme, nous n'étudierons qu'un cas particulier (mais qui est le plus important et le plus fréquent en pratique), qui est présenté dans l'exemple suivant.

Licence Ouverte Etalab 2.0

II. Définition, propriétés

II.1. Définition

▸ **Définition 2.1**

Lorsque la fonction de fiabilité R s'écrit $R(t) = e^{-\lambda t}$ où λ est un réel strictement positif (comme dans l'exemple précédent où on avait $\lambda = 0{,}000\,5$), on dit que la variable aléatoire T (la durée de vie du matériel) suit une **loi exponentielle** de paramètre λ. Conformément au programme, c'est la *seule situation* rencontrée.

$T \sim \mathcal{E}_\lambda$ signifie que la fonction de fiabilité est la fonction R définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $R(t) = e^{-\lambda t}$.

II.2. Calculs de probabilités

▸ **Exemple 2.1**

On reprend l'exemple précédent, on prélève au hasard une ampoule de ce lot et on admet que sa durée de vie définit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$.

— La probabilité de l'événement A : « l'ampoule fonctionne correctement au bout de 1 000 heures » est :

$$p(A) = R(1000) = e^{-0{,}000\,5\times 1000} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}606\,5$$

— La probabilité de l'événement B : « l'ampoule fonctionne correctement au bout de 1 500 heures » est :

$$p(B) = R(1500) = e^{-0{,}000\,5\times 1500} = e^{-0{,}75} \approx 0{,}472\,4$$

— La probabilité de l'événement C : « l'ampoule fonctionne correctement au bout de 500 heures » est :

$$p(C) = R(500) = e^{-0{,}000\,5\times 500} = e^{-0{,}25} \approx 0{,}778\,8$$

Et $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(B)}{p(A)} = \dfrac{e^{-0{,}75}}{e^{-0{,}5}} = e^{-0{,}25}$ qui est exactement $p(C)$.

▸ **Remarque 2.1**

Autrement dit, la probabilité que l'ampoule fonctionne correctement au bout de 1500 heures sachant qu'elle a déjà fonctionné correctement pendant les 1 000 « premières » heures, est exactement la même que la probabilité que l'ampoule fonctionne correctement au bout de 500 heures (sous-entendu : comme si, au départ, cette ampoule « n'avait encore jamais fonctionné »). Bref, que l'ampoule ait déjà fonctionné ou non, la probabilité qu'elle fonctionne encore 500 heures de plus est toujours la même !

▸ **Propriété 2.1**

La loi exponentielle est donc une loi **sans mémoire**, au sens où si T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, et si $t_1 \leqslant t_2$ sont deux réels positifs, on constate que :

$$p(T > t_1 + t_2) = R(t_1 + t_2) = R(t_1)R(t_2) = p(T > t_1) \times p(T > t_2)$$

Donc :

$$p_{(T>t_1)}(T > t_1 + t_2) = R(t_2) = p(T > t_2)$$

▸ **Idée 2.1**

Ainsi, la probabilité que le dispositif fonctionne encore correctement à la date $t_1 + t_2$ sachant qu'il a déjà fonctionné correctement jusqu'à la date t_1, est exactement égale à la probabilité que le dispositif fonctionne encore correctement à la date t_2 (donc, a priori, comme si le dispositif avait fonctionné jusqu'à la date t_2 en étant « neuf » au départ).

▸ **Remarque 2.2**

On retiendra donc que la modélisation des questions de fiabilité par une loi exponentielle est plutôt adaptée aux situations où les dispositifs étudiés ne subissent pas de défauts « d'usure », donc plus adaptée aux dispositifs électriques ou électroniques qu'aux dispositifs purement « mécaniques ».

Licence Ouverte Etalab 2.0

II.3. Moyenne des temps de bon fonctionnement

▸ **Propriété 2.2**

Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, on démontre que son espérance $\mathbb{E}(T)$ et son écart-type $\sigma(T)$ vérifient :

$$\mathbb{E}(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Or, $\mathbb{E}(T)$ s'interprète en termes statistiques comme une moyenne, cette valeur correspond donc ici à la durée moyenne de vie du matériel étudié. En fiabilité, cette durée de vie moyenne est appelée **MTBF** (Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement, et, en anglais, Mean Time Before Failure). En résumé :

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda}.$$

II.4. Travail sur le paramètre

▸ **Méthodes 2.1**

Si le paramètre λ n'est pas connu, il peut l'être grâce à :

- la donnée de la MTBF ;
- la donnée d'une probabilité particulière, et de ce fait par une résolution d'équation.

II.5. Systèmes en série et en parallèle

▸ **Propriété 2.3**

On considère deux composants dont les durées de vie T_1 et T_2 sont indépendantes, de fonctions de fiabilité R_1 et R_2 et de fonctions de défaillance F_1 et F_2.

- **En série** (le système fonctionne si les deux composants fonctionnent) : $R(t) = R_1(t) \times R_2(t)$.
  Si $T_1 \sim \mathcal{E}_{\lambda_1}$ et $T_2 \sim \mathcal{E}_{\lambda_2}$, alors $R(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$: le système suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- **En parallèle** (le système fonctionne si au moins un composant fonctionne) : $F(t) = F_1(t) \times F_2(t)$
  C'est-à-dire $R(t) = 1 - \big(1 - R_1(t)\big)\big(1 - R_2(t)\big)$.

▸ **Exemple 2.2**

Un drone embarque deux contrôleurs de vol identiques, dont la durée de vie (en heures) suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$. Les pannes sont indépendantes. On s'intéresse à la probabilité que le système fonctionne encore après 500 heures de vol.

- Un seul contrôleur : $R(500) = e^{-0{,}001\times 500} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$.
- Deux contrôleurs **en série** : $R(500) = e^{-0{,}002\times 500} = e^{-1} \approx 0{,}368$.
- Deux contrôleurs **en parallèle** (redondance) : $R(500) = 1 - \big(1 - e^{-0{,}5}\big)^2 \approx 0{,}845$.

Licence Ouverte Etalab 2.0