TD 01 Loi binomiale, loi de Poisson

Exercice 1

On donne $X \sim \mathcal{B}(150\,;0{,}42)$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$ (l'écart-type sera arrondi au centième).
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice (en arrondissant au millième) :
   a. $P(X = 64)$;
   b. $P(X \leqslant 70)$;
   c. $P(X \geqslant 50)$;
   d. $P(40 \leqslant X \leqslant 60)$.

Exercice 2

Une compagnie bancaire dont la clientèle est très nombreuse propose des placements financiers à ses clients. L'objet de cet exercice est d'étudier un placement de type A.
Tous les résultats numériques seront arrondis à 10^{-3}.
La banque constate que le produit de type A intéresse 10 % de sa clientèle.

1. Un sondage est effectué auprès d'un échantillon aléatoire de 10 clients de la banque.
   Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 10 clients à un échantillon non exhaustif (c'est-à-dire effectué avec remise).
   On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de clients qui ont choisi le produit A.
   a. Préciser la loi suivie par X. Justifier et donner les paramètres de la loi.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins 2 clients de l'échantillon aient choisi le produit A.
2. Un sondage est maintenant effectué auprès d'un échantillon de 30 clients de la banque.
   Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 30 clients à un échantillon non exhaustif de 30 clients.
   On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de clients qui ont choisi le produit A.
   a. Préciser la loi de Y. Calculer l'espérance mathématique de Y. Que représente $\mathbb{E}(Y)$?
   b. On approche la loi de Y par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi.
   c. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au moins deux clients de l'échantillon aient choisi le produit A. (On désignera par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson utilisée pour l'approximation).

Exercice 3

On a observé que 2 % des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation. On suppose que les pannes de tels micros sont indépendantes.
On note X la variable aléatoire associant le nombre mensuel de pannes prévisibles à chaque parc de 150 machines (on assimilera le choix des 150 machines à un tirage avec remise et on supposera les pannes indépendantes.)

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité (arrondie au millième) des évènements suivants :
   a. A : « Le nombre mensuel de pannes est 5 » ;
   b. B : « Le nombre mensuel de pannes est au plus égal à 3 ».
3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.
4. On utilise cette approximation dans la suite de l'exercice (on notera Y une telle variable).
   a. Reprendre les calculs du 2..
   b. Déterminer le plus petit entier N tel que $P(Y \leqslant N) \geqslant 0{,}99$.

Licence Ouverte Etalab 2.0