CHAP 03 Suites numériques - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^3 + 3n - 1$ pour tout entier n.

1. Calculer u_0 puis u_1.
2. Calculer la valeur de u_{10}.
3. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n. Sont-ils égaux ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$ pour tout entier n.

1. Calculer u_0 puis u_1.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Calculer la valeur de u_{50}.

Exercice 3 ··· EN ROUTE VERS LES AUTOMATISMES ···

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier n. Alors u_3 est égal à :

☐ -3	☐ -1	☐ 1	☐ -5

2. La suite (u_n) est définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout entier n. Alors u_{n+1} est égal à :

☐ $2n + 2$	☐ $2n + 3$	☐ $2n + 1$	☐ $3n + 2$

3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier n. La fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est :

☐ $f(x) = 2x - 3$	☐ $f(x) = 4x - 3$
☐ $f(x) = 2n - 3$	☐ $f(x) = 2x + 4$

4. La suite (u_n) est définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier n. Alors :

☐ elle est croissante	☐ elle n'est pas monotone
☐ elle est décroissante	☐ elle converge vers 0

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Déterminer, en utilisant la calculatrice, la valeur de u_{15}.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n^2 + 1}$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Déterminer, en utilisant la calculatrice, la valeur de u_{20} (arrondir à 10^{-4}).

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = n - u_n$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 (attention aux indices !).
2. Déterminer, en utilisant la calculatrice, la valeur de u_{18}.

Exercice 7

On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)v_n}{n(1+v_n)}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Calculer les valeurs de v_2, v_3 et v_4.
2. Déterminer, en utilisant le module **`Suites`** de la calculatrice, la valeur de v_{11} (arrondir au millième).

Exercice 8

On construit des rangées de carrés avec des allumettes. Le motif n est formé de n carrés accolés. On note a_n le nombre d'allumettes nécessaires pour construire le motif n.



motif 1 motif 2 motif 3

1. Donner a_1, a_2 et a_3, puis calculer a_4 en dessinant le motif 4.
2. Pour passer du motif n au motif n+1, combien d'allumettes faut-il ajouter ? En déduire une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.
3. Conjecturer une formule explicite donnant a_n en fonction de n et vérifier avec a_1, a_2, a_3 et a_4.
4. Combien d'allumettes faut-il pour construire le motif 20 ?
5. Avec exactement 100 allumettes, peut-on construire un motif sans en avoir en trop ? Si oui, lequel ?

Exercice 9

Une chaîne vidéo compte 1 200 abonnés au 1er janvier. Chaque mois, elle perd 5 % de ses abonnés et en gagne 100 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés au bout de n mois (on ne tient pas compte du fait que ce nombre doit être entier).

1. Donner u_0, puis calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 100$.
3. Déterminer, en utilisant la calculatrice, le nombre d'abonnés au bout d'un an (arrondir à l'unité).
4. Calculer u_{50} et u_{100} (arrondir à l'unité). Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n), puis interpréter cette limite dans le contexte.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 10

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{2}{5^n}$ pour tout entier n.

1. Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3.
2. Montrer que le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ est indépendant de n pour tout entier n.
3. Justifier que tous les termes de la suite sont strictement positifs, puis en déduire le sens de variation de (w_n).
4. Conjecturer la limite éventuelle de (w_n).

Exercice 11

Étudier le sens de variation des suites suivantes, définies pour tout entier n :

1. $a_n = n^2 - 6n$: montrer que $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$, étudier son signe, puis en déduire que (a_n) est croissante à partir d'un rang que l'on précisera ;
2. $b_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$: montrer que $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, puis conclure.

Exercice 12 ··· ACCROCHEZ-VOUS ! ···

On considère la suite (c_n) définie par $c_0 = 0$ et $c_{n+1} = c_n^2 + 1$ pour tout entier n.

1. Calculer c_1, c_2 et c_3.
2. Montrer que $c_{n+1} - c_n = c_n^2 - c_n + 1$ pour tout entier n.
3. Étudier le signe du trinôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le discriminant et parabole).
4. En déduire le sens de variation de (c_n).
5. Calculer c_4, c_5 et c_6 à la calculatrice. Conjecturer la limite de (c_n).

Exercice 13 ··· ACCROCHEZ-VOUS ! ···

1. Soit (p_n) la suite définie par $p_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ pour tout entier n.

   Justifier que les termes sont strictement positifs, calculer $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ puis en déduire le sens de variation de (p_n).

2. Soit (r_n) la suite définie par $r_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ pour tout entier n.

   Montrer que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{n+2}{2n+2}$, puis comparer ce quotient à 1 pour en déduire le sens de variation de (r_n).

3. Soit (s_n) la suite définie par $s_n = -\dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier n.

   Un élève affirme : « $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite (s_n) est décroissante ». Calculer s_0, s_1 et s_2 : a-t-il raison ? Déterminer alors le sens de variation de (s_n) en utilisant la différence $s_{n+1} - s_n$.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer que $u_{2n} > 0$ pour tout entier n, et que $u_{2n+1} < 0$ pour tout entier n.
3. En déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone.
4. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle de (u_n).

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 15

Pour chaque suite, compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), puis conjecturer sa limite éventuelle, en précisant si la suite converge, tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite.

	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$
$u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$				
$v_n = \sqrt{n}$				
$w_n = 0{,}8^n$				
$x_n = 1\,000 - n^2$				
$y_n = (-1)^n$				

Exercice 16

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier (par une démonstration ou un contre-exemple).

1. Si une suite (u_n) est croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si $u_n = f(n)$ où f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
3. Si $u_n = f(n)$ et si la suite (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $[0;+\infty[$ (on pourra tester avec $f(x) = x^2 - x$).
4. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 17 ••• UN PEU DE PYTHON •••

On reprend les données de la chaîne vidéo de l'exercice n°9 : $u_0 = 1\,200$ et $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 100$.

1. Compléter les deux fonctions suivantes, en python, qui vérifient :
   - `terme(n)` renvoie le terme u_n de la suite ;
   - `seuil(S)` renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geqslant S$.

Code Python

```
def terme(n):
    u = ......
    for i in range(1, ......):
        u = ......
    return u

def seuil(S):
    n = 0
    u = 1200
    while ...... :
        u = 0.95*u + 100
        n = ......
    return n
```

2. Interpréter chacun des résultats suivants dans le contexte de l'exercice :

```
Début de la console Python
>>> terme(12)
1567.71192986989
>>> seuil(1500)
10
>>> seuil(1999)
131
Fin de la console Python
```

Exercice 18 ··· UN PEU DE PYTHON ···

On considère la fonction suivante, en python, qui calcule la somme des n premiers entiers impairs, autrement dit la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.

Code Python

```
def somme_impairs(n):
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        s = s + ......
    return s
```

1. Compléter la fonction (le i-ème entier impair est $2i - 1$).
2. On obtient dans la console :

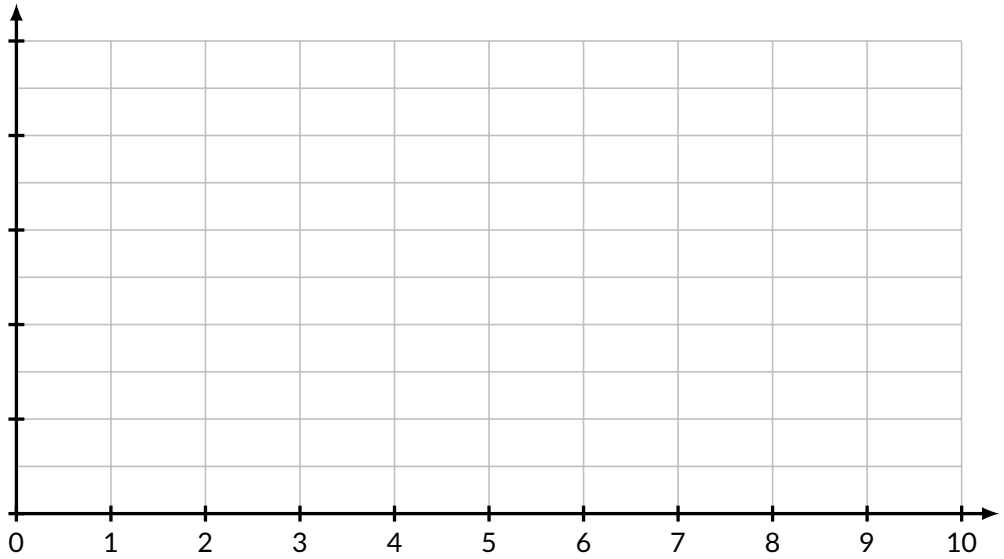
```
Début de la console Python
>>> [somme_impairs(n) for n in range(1, 8)]
[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]
>>> somme_impairs(10)
100
>>> somme_impairs(20)
400
Fin de la console Python
```

Conjecturer une formule donnant $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ en fonction de n.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) ainsi que le 15ème.
2. Représenter, dans le repère suivant (les graduations verticales sont à préciser), les 10 premiers termes de (u_n).



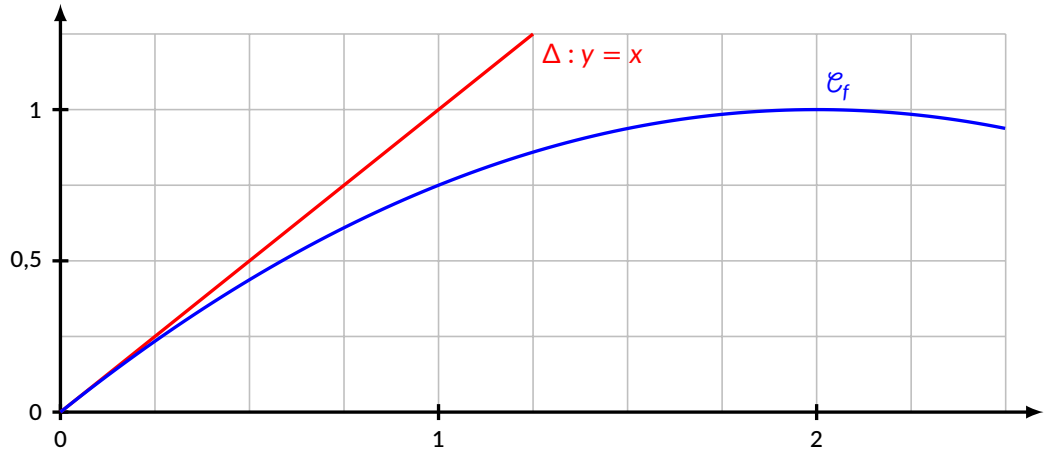
3. Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite éventuelle de la suite (u_n).
4. a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{n(n+1)}$ pour tout entier n non nul.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier n non nul (on dit que (u_n) est **minorée** par 1).

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 20

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = -0{,}25\,v_n^2 + v_n$ pour tout entier n.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. a. Déterminer la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.
   b. À l'aide de la courbe $\mathcal{C}_f$ donnée ci-dessous, représenter graphiquement les premiers termes de (v_n).



   c. Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite éventuelle de la suite (v_n).
3. Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel n, puis en déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 21 ··· AVEC UN *TABLEUR* ···

On souhaite étudier à l'aide d'un tableur trois suites définies pour tout entier n par :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1} \qquad v_n = n^2 - 10n \qquad w_n = 100 \times 0{,}9^n.$$

Dans un tableur, on a saisi les rangs n dans la colonne A (de 0 à 100) et la formule de u_0 en B2.

	A	B	C	D
1	n	u(n)	v(n)	w(n)
2	0	=(2*A2+3)/(A2+1)		
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			

1. Quelles formules faut-il saisir dans les cellules sélectionnées C2 et D2 pour calculer v_0 et w_0 ? Comment obtenir ensuite les valeurs jusqu'à $n = 100$?
2. Calculer à l'aide du tableur u_{100}, v_{100} et w_{100} (arrondir au millième si besoin). Conjecturer le sens de variation et la limite éventuelle de chacune des trois suites.
3. Les valeurs de v_n pour n proche de 5 montrent que (v_n) n'est pas monotone. À partir de quel rang semble-t-elle croissante ? Le démontrer en calculant $v_{n+1} - v_n$.
4. Vérifier que $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier n. Comment retrouver ainsi la limite conjecturée ?

Licence Ouverte Etalab 2.0