DM 06 Probabilités, suites

NOM : ..... **Prénom :** ..... **Note :** .....

Exercice 1

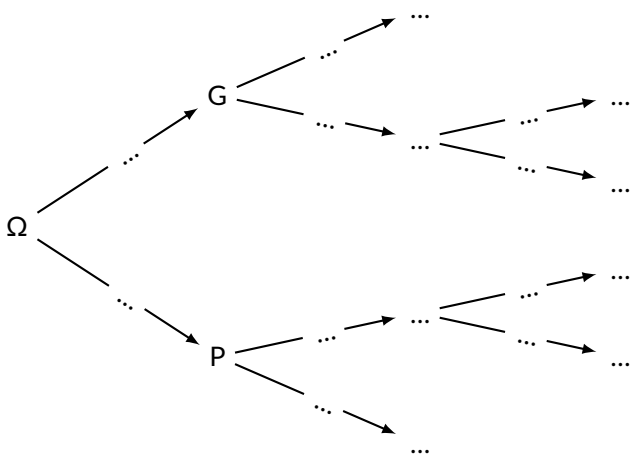


Emma et Daniel disputent une série de manches « au meilleur des trois » : le premier joueur qui remporte **deux** manches gagne la série, et on arrête alors de jouer. À chaque manche, Emma gagne avec la probabilité 0,6 (sinon Daniel gagne), et les manches sont indépendantes.



On note S l'évènement « Emma gagne la série » et T l'évènement « la série se joue en trois manches ».

1. **a.** Compléter l'arbre pondéré de la situation (on notera G une manche gagnée par Emma et P une manche perdue par Emma, et on s'arrêtera dès que la série est terminée). Combien l'arbre compte-t-il d'issues ?



b. Expliquer brièvement pourquoi l'arbre n'est pas « *complet* » (il *manque* des branches).

2. **a.** Montrer que $p(S) = 0{,}648$.
b. Montrer que $p(T) = 0{,}48$.

3. *Pour les deux questions suivantes, identifier et analyser correctement les évènements qui apparaissent dans les formules utilisées.*
a. Emma a gagné la série. Quelle est la probabilité qu'elle ait perdu la première manche ? Donner la valeur exacte.
b. La série s'est jouée en trois manches. Calculer la probabilité que Emma ait gagné la série. Que remarque-t-on ?

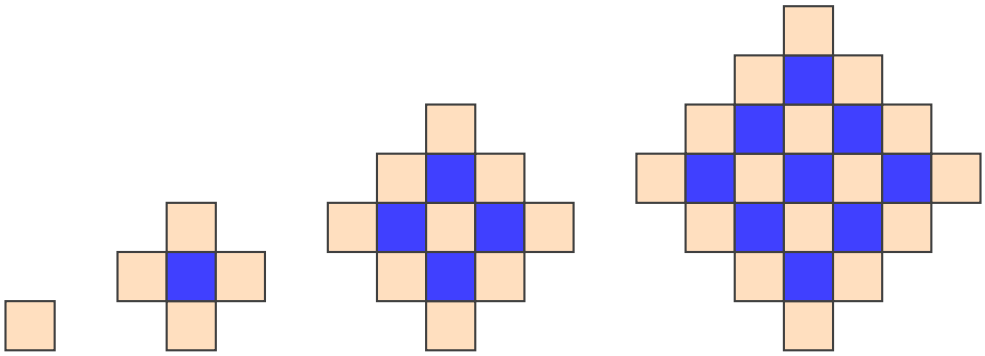
4. Les évènements S et T sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

5. **[Bonus]** On suppose désormais que Emma gagne chaque manche avec une probabilité p ($0 < p < 1$) quelconque, les manches restant indépendantes.
a. Montrer que la probabilité que la série se joue en trois manches est $p(T) = 2p - 2p^2$.
On pourra s'aider de l'arbre précédent, avec les nouvelles données.
b. Pour quelles valeurs de p a-t-on $p(T) = 0{,}42$?
c. Peut-on avoir $p(T) = 0{,}6$? Justifier la réponse.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 2

On construit des figures en losange à l'aide de carreaux. La figure 1 est formée d'un seul carreau ; pour passer d'une figure à la suivante, on ajoute une « couronne » de carreaux tout autour.
On note u_n le nombre de carreaux de la figure n (avec $n \geqslant 1$).



Figures 1 à 4

1. Compléter le tableau suivant.

Figure n	1	2	3	4	5
Nombre de carreaux u_n					

2. a. Combien de carreaux ajoute-t-on pour passer de la figure 1 à la figure 2 ? de la figure 2 à la figure 3 ? de la figure 3 à la figure 4 ?
   b. Conjecturer le nombre de carreaux à ajouter pour passer de la figure n à la figure $n+1$, puis écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.
   c. En déduire u_6 puis u_7.
3. Les carreaux des figures sont coloriés en deux couleurs, en alternant (comme sur un damier).
   a. Combien y a-t-il de carreaux de chaque couleur dans les figures 2, 3 et 4 ? Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
   b. Vérifier que cette expression est égale à $2n^2 - 2n + 1$, puis calculer u_{20}.
4. Un artisan souhaite réaliser une mosaïque en forme de losange comportant exactement 113 carreaux.
   a. Montrer que la figure n convient si et seulement si $n^2 - n - 56 = 0$.
   b. Résoudre cette équation du second degré dans $\mathbb{R}$.
   c. Conclure.
5. Un autre client souhaite une mosaïque en losange de 100 carreaux.
   a. Montrer que la figure n convient si et seulement si $2n^2 - 2n - 99 = 0$.
   b. L'artisan peut-il satisfaire ce client ? Justifier la réponse.
6. **[Bonus Python]** On souhaite obtenir le nombre de carreaux d'une figure à l'aide du programme python ci-dessous. Compléter les pointillés, puis indiquer la valeur de la variable u à la fin de l'exécution.

Code Python

```
u = 1
for n in range(1, 8) :
    u = u + ......
print(u)
```

Licence Ouverte Etalab 2.0