TD 02 Probabilités conditionnelles

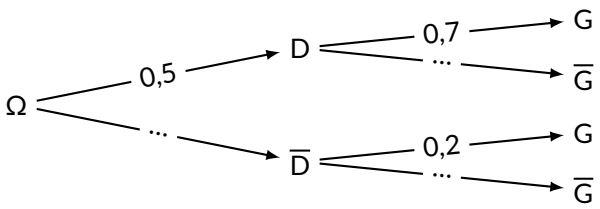
NOM : ..... **Prénom :** ..... **Note :** .....

Exercice 1

Une salle de jeu comporte deux consoles identiques proposant le même jeu. Un jour l'une des deux est déréglée. Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des consoles et il joue une partie sur cette console. On note :
   - D l'évènement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'évènement contraire ;
   - G l'évènement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'évènement contraire.

   Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant :



   a. Compléter l'arbre de probabilités précédent.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».
   c. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».
   d. Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.
   e. Calculer la probabilité que le joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2. Les événements D et G sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. Le joueur fait trois parties de suite, que l'on suppose indépendantes, sur la console choisie au hasard à chaque fois. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur gagne trois parties de suite ».

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 2

Dans un lycée, on s'intéresse au mode de déplacement des élèves de première pour venir en cours, et à leurs retards.
On sait que :

- 50 % des élèves viennent en bus, 20 % viennent à vélo et les autres viennent à pied ;
- 10 % des élèves qui viennent en bus arrivent en retard ;
- 5 % des élèves qui viennent à vélo arrivent en retard ;
- $\frac{1}{5}$ des élèves qui viennent à pied arrivent en retard.

On interroge au hasard un élève de première de ce lycée. On note :

B : « l'élève vient en bus »,

V : « l'élève vient à vélo »,

P : « l'élève vient à pied »,

R : « l'élève arrive en retard ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que l'élève interrogé vienne en bus et arrive en retard.
3. Vérifier que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,12.
4. L'élève interrogé est en retard. Déterminer la probabilité qu'il soit venu à pied.
5. Les évènements B et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 3

Une messagerie a reçu 500 courriels au cours d'une semaine. Un filtre automatique classe certains d'entre eux comme « indésirables ».
Le tableau suivant donne la répartition de ces courriels selon qu'ils sont réellement des spams ou non, et selon qu'ils ont été classés indésirables ou non par le filtre.

	Classés indésirables (F)	Non classés ($\overline{F}$)	Total
Spams (S)	180	20	
Non-spams ($\overline{S}$)	15	285	
Total			

On choisit au hasard un de ces courriels. On note :

- S l'évènement « le courriel est un spam » ;
- F l'évènement « le courriel est classé indésirable par le filtre ».

1. Compléter les totaux du tableau.
2. Calculer $p(S)$, $p(F)$ et $p(S \cap F)$.
3. Calculer $p_S(F)$ et $p_F(S)$, puis interpréter chacun de ces deux résultats dans le contexte de l'exercice.
4. Un courriel classé indésirable qui n'est pas un spam est appelé un « faux positif ». Calculer la probabilité qu'un courriel classé indésirable soit un faux positif.
5. Représenter la situation par un arbre pondéré (en commençant par S et $\overline{S}$), puis retrouver $p(F)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
6. Les évènements S et F sont-ils indépendants ? Justifier la réponse et commenter.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 4

Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique.
Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.
On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables. On note :

- L : l'évènement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'évènement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'évènement « le chocolat choisi est blanc » ;
- P : l'évènement « le chocolat choisi est garni de praliné » et C : « le chocolat choisi est garni de caramel ».

1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilités, qui sera complété au fil des questions.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné. Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à 0,7.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
   a. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
   b. En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.
6. [Bonus] On dispose de deux boîtes de chocolats identiques à celle décrite précédemment. Une personne prend au hasard un chocolat dans la première boîte, puis un chocolat dans la deuxième boîte (tirages indépendants).
   Déterminer la probabilité de l'évènement : « l'un des chocolats choisi est garni de praliné et l'autre est garni de caramel ».

Licence Ouverte Etalab 2.0